الرياضيات

الوحدة الفهرس

الوحدة الأولى

تعريف المجموعة:

تُعرَّف المجموعة رياضيًّا أو منطقيًّا بأنها أي تجمع أو تكتل من الأشياء الحسية أو المعنوية التي يمكن تميزها عن غيرها بمعيار دقيق وقاطع متفق عليه. مثالٌ على ذلك المجموعاتُ التالية:

أ- مجموعة الأعداد.

ب- مجموعة الاثنى عشر شهرًا في السنة الميلادية.

ج- مجموعة الأعداد الكبيرة.

د- مجموعة الحدائق الجميلة في المملكة العربية السعودية.

ففيها نعتبر (أ) و (ب) مجموعتين؛ لأن عناصرها معروفة ومحددة، أما المجموعتان (ج) و (د) فلا نعتبرهما _رياضيًّا_ مجموعتين؛ لأن المعايير الموجودة فيها هي معايير نسبية وليست دقيقة؛ فمعيار الكبر والجمال يتفاوت من شخص إلى آخر. فإذن عناصر (ج) و (د) غير معروفة وغير محددة؛ ولذلك لا نعتبرهما مجموعتين .

المجموعة وطرق تعريفها:

طرق تعريف المجموعات

هناك ثلاث طرق لتعريف المجموعة، وهي كالتالي:

- طريقة التعريف بعبارة
- طريقة السرد أو حصر العناصر
- طريقة القاعدة المعينة

طريقة التعريف بعبارة:

في هذه الطريقة نكتفي بذكر عبارة معينة يمكن عندها تحديد عناصر المجموعة فمثلاً نقول (A) هي مجموعة الأعداد الطبيعية يلاحظ أن هذه الطريقة غير مناسبة للمجموعات التي تكون فيها العلاقة بين العناصر غير واضحة

طريقة السرد أو حصر العناصر:

وفيها نقوم بذكر جميع عناصر المجموعة فمثلاً (A) مجموعة الأعداد الزوجية المحصورة بين ١ و ٩ هي A={2,4,6,8} يلاحظ أن هذه الطريقة غير مناسبة إلا للمجموعات قليلة العناصر فمثلاً لا يمكن سرد كل عناصر مجموعة الأعداد الزوجية.

طريقة القاعدة المعينة:

وفيها يكون تسلسل العناصر له نمط ظاهر بحيث يمكن التعبير عنه بقاعدة معينة فمثلاً المجموعة A={2,4,6,8}يمكن كتابتها بالقاعدة التالية:

عادة يتم استخدام الأحرف الصغيرة للتعبير عن أي عنصر من المجموعة فمثلا.. لنستخدم حرف

(x)؛ ليمثل عنصر من المجموعة A لأننا في الاقواس نكتب (x) ملحوقة بالنقطتين الرئيستين ثم نكتب القاعدة التى يجب اتباعها لتحقيق المجموعة A في هذه الحالة (x) عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي ٢ وأصغر من أو يساوي ٨ حيث (N) مجموعة الأعداد الطبيعية وتقرأ (A) هي المجموعة المكونة من العناصر (X) حيث إن (X) عدد زوجي طبيعي أكبر من أو يساوي ٢ وأصغر من أو يساوي ٨

رموز المجموعات وعناصرها

عادةً ما نرمز للمجموعات بحروف لاتينية كبيرة بينما نرمز للأشياء التي تتألف منها المجموعة والتي تسمى بعناصر المجموعة بحروف صغيرة وعادةً ما تكتب هذه العناصر بين قوسين من هذا النوع وتوضع فواصل بينها

المجموعة الجزئية

نقول إن: **B**هي مجموعة جزئية من المجموعة **A** إذا كانت محتواة في **A**

أو بمعنى آخر

إن جميع عناصر **B** موجودة في المجموعة**A** ،

ونرمز لها كما في الفيديو.

ويمكن كتابتها رياضيًّا كما في الفيديو

إذا كانت **B** جزءًا من **A**، و **A** لا تساوى **B**

فنقول: إن **B** مجموعة جزئية فعلية من **A**، وتكتب هكذا

أما إذا كانت **B** ليست مجموعة جزئية من **A**، فتكتب هكذا

مثال: لتكن المجموعات التالية

A= {3,5,11,24}

B= {5,24}

C= {3,11,12}

نلاحظ في هذا المثال عند مقارنة **B** و **C** مع **A**، أن **B** جزء من**A**

لكن **C** ليست جزءًا من **A**؛ لأن العدد ١٢ لا ينتمي إلى **A**

المجموعة الشاملة والمجموعة الخالية:

عند دراسة أي ظاهرة علمية أو اجتماعية، فإننا نتعامل مع مجموعة أساسية كبيرة تحتوي على جميع المجموعات تحت الدراسة.

فمثلاً، يمكن أن نصنف جميع طلبة الكلية كمجموعة أساسية،

بينما مجموعات الطلبة في التخصصات المختلفة هي مجموعات جزئية من المجموعة الأساسية.

نسمي مثل هذه المجموعة الأساسية المجموعةَ الشاملة، ونرمز لها بالرمز U.

فمثلاً، تعتبر المجموعة U={-٢١,٧,٢,٥}

هي مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعات A={٢١,٢} و B={-٢١,٧,٥}؛

لأن المجموعات A و Bمجموعات جزئية من U.

المجموعة الخالية هي المجموعة التي لا تحتوي على أي عنصر،

ويرمز لها بالرمز (فاي) أو أقواس المجموعة فارغة.

فمثلاً، هذه المجموعة هي مجموعة خالية؛ لأنه ليس هناك أي عنصر يحقق الشرط المذكور.

فمفهوم المجموعة الخالية يقابله مفهوم الصفر في الأعداد،

وتعتبر المجموعة الخالية مجموعة وحيدة وجزئية من أي مجموعة أخرى.

تساوي مجموعتين

نقول: إن المجموعتين A وB متساويتان،

إذا كانت كل منهما مجموعة جزئية من الآخر، كما بالتالي

مثال: هل المجموعتان التاليتان متساويتان؟ شاهد الفيديو

الحل

عناصر المجموعة (A) معروفة ومحددة

ولكن عناصر المجموعة (B) غير محددة

فيجب علينا إذن تحديد عناصرها، ويتم ذلك بحل المعادلة المعطاة

أنواع العمليات على المجموعة

- اتحاد مجموعتين

- تقاطع مجموعتين
- العلاقة بين الاتحاد والتقاطع
- الفرق بين مجموعتين
- متممة المجموعة
- قانون ديمورغان
- الفرق التناظري بين مجموعتين

كيفية تمثيل العمليات

اتحاد مجموعتين

إذا كانت A وB مجموعتين، فإن اتحادهما هو مجموعة جميع العناصر الموجودة

في كل من A أ و B أو كليهما، ونرمز لهذه العملية بالرمز

ونعرفها رياضيًّا كما يلي

اتحاد A مع B هي المجموعة المكونة من العناصر x

حيث x عنصر من عناصر المجموعة A، أو عنصر من عناصر المجموعة B

ويمكن تمثيل ذلك بأشكال توضيحية تسمى أشكال «ڤن»

وهي عبارة عن رسم بياني يمثل مجموعات الرياضية أو المنطقية بالصور

كدوائر أو منحنيات مغلقة داخل المستطيل

المجموعة الشاملة U

العناصر المشتركة للمجموعات التي يمثلها التقاطعات من الدوائر

مثال: إذا كانت المجموعتان {1,2,3,5} =A و {2,4,6} =B

إذن: اتحاد A مع B هو

{١,٢,٣,٤,٥,٦}

خصائص الاتحاد

تقاطع مجموعتين

إذا كانت AوB مجموعتين

فإن تقاطعهما هي مجموعة العناصر المشتركة بين A وB

ونرمز للتقاطع بالرمز الموضح

ونعرفه كما يلي

تقاطعA معB هي المجموعة المكونة من العناصر x

حيث x عنصر من عناصر المجموعة A، وعنصر من عناصر المجموعة B

مثال: إذا كانت المجموعتان A

هي المجموعة المكونة من العناصر x

حيث x عدد طبيعي، وأكبر من أو يساوي الـ ٦

B هي المجموعة المكونة من العناصر x

حيث x عدد طبيعي، وأكبر من أو يساوي الـ ١١

إذن: تقاطع A مع B هو المجموعة المكونة من العناصر x

حيث x عدد طبيعي، وأكبر من أو يساوي الـ ١١

خصائص التقاطع

العلاقة بين الاتحاد والتقاطع (قانون التوزيع)

إذا كانت A,B,C ثلاث مجموعات، فإنّ

اتحادA مع تقاطعB مع C، يساوي

(أي أنّ الاتحاد توزيعي على التقاطع)

تقاطع A مع اتحاد B مع C، يساوي

(أي أنّ التقاطع توزيعي على الاتحاد)

نُعرِّف حاصل طرح المجموعة B من المجموعة A بأنه

مجموعة العناصر التي هي موجودة في A

وفي الوقت نفسه ليست موجودة في B، ويرمز لهذا الفرق بالرمز

ونكتب رياضيًّا

الفرق بينA و B هي المجموعة المكونة من العناصر x

حيث x عنصر من عناصر المجموعة A

وليس عنصرًا من عناصر المجموعة B

مثال: إذا كانت المجموعتان: {1,5,6,12,20}=A

و {٣،٦،١٢،١٨،٢٠} = B

إذن: الفرق بين A و B يساوي: ١ و ٥

والفرق بين B وA يساوي: ٣ و ١٨

خصائص الفرق

إذا كانت U مجموعة شاملة بالنسبة للمجموعةA

نُعرِّف متممة A بأنها مجموعة العناصر الموجودة في U

وفي الوقت نفسه ليست موجودة في A. (أي بمعنى آخر U-A)

ونرمز لمتممة بالرمز

ونكتب رياضيًّا

متممة المجموعة A يساوي الفرق بين المجموعة الشاملة U والمجموعة A

فهى مجموعة العناصر المكونة من x

حيث x عنصر من عناصر U، وليس عنصرًا من عناصر A

مثال: إذا كانت المجموعتان: {1,2,3}=A

و {١،٢،٣،٤،....} = U=N

إذن: متممة المجموعةA يساوي ٤ و ٥ و ٦ و ....

خصائص المتممة

قانون ديمورغان

إذا كانت A و B مجموعتين ضمن المجموعة الشاملة U، عندئذ يتحقق التالي

نُعرِّف الفرق التناظري بين مجموعتين A و B

بأنه مجموعة العناصر الموجودة إما في A أو B

ولكن ليست موجودة في العناصر المشتركة بين المجموعتين

أي بمعنى آخر العناصر الموجودة في اتحاد المجموعتين وفي الوقت نفسه

ليست موجودة في التقاطع

مثال: إذا كانت المجموعتان: {2,3,4,5}=Aو {2,4,a,b}=B

إذن: فرق التناظري بين A و B

يساوي ٣ و ٥ و a و b

تعريف المجموعات العددية

وفيما يلي تذكير وتأصيل لهذه المجموعات: مجموعة الأعداد الطبيعية. مجموعة الأعداد الكلية. مجموعة الأعداد الصحيحة. مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية. مجموعة الأعداد الحقيقية.

مجموعة الأعداد الطبيعية: وهي مجموعة الأعداد الأساسية المألوف عليها، ونرمز لها بالحرف اللاتيني الكبير N.

مجموعة الأعداد الكلية: وهي مجموعة الأعداد الطبيعية مضافًا إليها العدد (٠)، ويرمز لها بالحرف W. وبمعنى آخر W تساوي N متحدة مع صفر.

مجموعة الأعداد الصحيحة: بإضافة مجموعة الأعداد السالبة إلى المجموعةW نحصل على مجموعة جديدة تُسمى مجموعة الأعداد الصحيحة، ونرمز لها بالحرفZ ، وستكون بهذا الشكل:

مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية: وهي المجموعة التي تكون فيها الأعداد على شكل كسر عددين صحيحين (بسط ومقام)، بشرط أن لا يساوي المقام فيها الصفر، ونرمز لها بالحرفQ . وإذا كتبنا هذا التعريف بطريقة القاعدة المعينة تكون كالتالي:

مجموعة الأعداد الحقيقية والتي نرمز لها بالرمز R: وهي تحتوي على مجموعة الأعداد الطبيعية، والأعداد الكلية، والأعداد الصحيحة، والأعداد النسبية، بالإضافة إلى الأعداد غيرالنسبية. وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على الطريقة التي عرفنا بها المجموعةQ سابقًا، مثل الجذر التربيعي لاثنين وباي.

الوحدة الثانية

العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية١

العمليات الحسابية التي يمكن إجراؤها على مجموعة الأعداد النسبية هي:

١- عملية الجمع والطرح

٢- عملية الضرب والقسمة

عملية الجمع والطرح

إذا كانت (a على b) و (c على b) ينتميان إلى مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية. فإن وإذا كانت (a على b) و (c على d) ينتميان إلى مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية. فإن هذه بعض الأمثلة عن عملية الجمع والطرح

عملية الضرب والقسمة

أولا: عملية الضرب

إذا كانت (aعلىb) و (c علىb) ينتميان إلى مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية. فإن ولحساب حاصل ضرب كسرين، نضرب البسط في البسط، والمقام في المقام

ثانيًا: عملية القسمة

إذا كانت (aعلىb) و (c علىd) ينتميان إلى مجموعة الأعداد النسبية أو الكسرية، و c لا تساوي الصفر فإن

ولحساب حاصل قسمة كسرين نحول القسمة إلى ضرب الكسر الأول في مقلوب الكسر الثاني ثم نضرب البسط في البسط، والمقام في المقام هذه بعض الأمثلة عن عملية الضرب والقسمة

العمليات الحسابية على الأعداد الحقيقية ٢

العمليات الحسابية التي يمكن إجراؤها على مجموعة الأعداد العشرية هي:

١. جمع وطرح الأعداد العشرية

٢. ضرب الأعداد العشرية

٣. قسمة الأعداد العشرية

٤. تقريب الأعداد العشرية

جمع وطرح الأعداد العشرية

يتم جمع أو طرح الأعداد العشرية بتوحيد عدد الخانات العشرية على يمين الفاصلة العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات حيث إن ذلك لا يؤثر في قيمة العدد العشري ثم نجمع أو نطرح الأعداد في الخانات المتناظرة كما في جمع أو طرح الأعداد الصحيحة، مع الاحتفاظ بموضع الفاصلة العشرية

ضرب الأعداد العشرية

لضرب عددين عشرين، نجري عملية الضرب كما نجريها لعددين صحيحين بدون أي اعتبار للفاصلة العشرية، ثم نضع الفاصلة العشرية بحيث يكون عدد الخانات العشرية في ناتج الضرب يساوي مجموع عدد الخانات العشرية للعددين العشريين فمثلاً لإجراء عملية الضرب ٣,٧ x3.25 نجري أولاً ٣٧ x325=12025 وحيث إن مجموع الخانات العشرية في العددين المضروبين هو ٣ فنحدد الفاصلة في ناتج الضرب بثلاث خانات ابتداءً من يمين العدد لنحصل على ٣,٧ x 3.25 =12.025

قسمة الأعداد العشرية

لقسمة الأعداد العشرية نساوي عدد الخانات العشرية وذلك بإضافة أصفار على يمين العدد الأقل خانات، ونلغي الفواصل ثم نقوم بالقسمة كقسمة عددين صحيحين حيث يصبح القاسم أقل من المقسوم عليه فنضيف إلى يمينه صفرًا مع وضع الفاصلة في الناتج ونتابع القسمة مع إضافة صفر إلى القاسم كلما أصبح أقل من المقسوم عليه كما في المثال التالي لإجراء عملية القسمة ٢١,٥٥٦ على ٦,٨ نوحد عدد الخانات العشرية، ونلغي الفواصل فيصبح المطلوب حساب حاصل قسمة ٢١٥٥٦ على ٦٨٠٠ والتي نجريها كما يلي وبذلك فإن الناتج هو: ٢١,٥٥٦\٦,٨=٣,١٧

تقريب الأعداد العشرية

لتقريب عدد عشري إلى منزلة محددة نتبع ما يلي إذا كان الرقم الذي على يمين المنزلة مباشرة أقل من العدد ٥ نحذفه مع جميع الأرقام الواقعة عن يمينه وإذا كان الرقم الذي على يمين المنزلة مباشرة أكبر أو يساوي العدد ٥ فنضيف ١ إلى رقم المنزلة المحددة، ونحذف جميع الأرقام الواقعة عن يمينه

ترتيب العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية

ترتيب العمليات الحسابية في مجموعة الأعداد الحقيقية:

لمنع حدوث خطأ أو التباس أثناء حل المسائل، نستخدم ترتيب العمليات الحسابية كما يلي:

١)نحسب القوى والجذور.

٢) نقوم بعملية الضرب أو القسمة حسب الترتيب مبتدئين من اليسار إلى اليمين.

٣) نقوم بعملية الجمع أو الطرح حسب الترتيب مبتدئين من اليسار إلى اليمين.

ملحوظتان مهمتان:

١- إذا كان في المسألة الحسابية أقواس، فإننا نجري العمليات التي بداخل الأقواس أولاً، وهو ما يسمى بفك الأقواس.

٢- نقوم بالعمليات الموجودة فوق وتحت خط الكسر؛ أي في البسط والمقام، كلاً على حدة.

خواص الأعداد الحقيقية:

هناك بعض الخواص للأعداد الحقيقية، شاهد الفيديو لمعرفة الخواص حيث أن a,b,c أعداد حقيقية

الوحدة الثالثة

تعريف كثيرات الحدود

تعريف كثيرات الحدود: يوجد ثلاثة تعريفات:

التعريف الأول: يكون الحدُّ الجبري إما ثابتًا أو متغيرًا، أو حاصل ضرب ثابت في متغير واحد أو أكثر، بشرط أن يكون أس المتغير عددًا صحيحًا غير سالب. يُسمَّى الثابت معامل الحد الجبري، وتكون درجة الحد الجبري هي حاصل جمع أسس المتغيرات فيه. فمثلا هنا: معامل الحد الجبري في هذه الحالة هو سالب ٣، ودرجته تساوي ٣، تساوي (٢+١).

التعريف الثاني: الحدود المتشابهة هي الحدود التي تحتوي على نفس المتغير (بما فيه الأس). فمثلاً: هذان حدان متشابهان، ولكن هذه الحدود ليست متشابهة.

ملحوظة: درجة الحد الثابت دائمًا تساوي الصفر.

التعريف الثالث: كثيرات الحدود هي عبارة عن جمع عدد منتهٍ من الحدود ودرجتها هي أكبر درجة حدٍّ فيها.

الشكل العام لكثيرات الحدود للمتغير x كالتالي: حيث" **a n** " لا تساوي صفرًا، و **n** عدد صحيح غير سالب. المعامل " **a n** " هو المعامل الرئيسي، و " **a 0** " هو الحد الثابت.

الجدول التالي يبين المعامل الرئيسي، الدرجة، الحدود والمعاملات لكثيرات الحدود الثلاثة التالية: رقم ١ رقم ٢ رقم ٣ شاهد الفيديو على الرابط : **https://youtu.be/L2p0W8XKrcI**

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود

سنتعلم فى هذا الدرس العمليات الحسابية التالية

- جمع وطرح كثيرات الحدود
- ضرب كثيرات الحدود
- حساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير
- قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)

جمع وطرح كثيرات الحدود

نقوم بجمع أو طرح الحدود المتشابهة، فقط.. كما هو موضح في الأمثلة التالية

ضرب كثيرات الحدود

تتم عملية الضرب بتوزيع جميع الحدود في القوس الأول على جميع الحدود في القوس الثاني وهكذا

والآن هيا بنا نتعرف على بعض القوانين المشهورة لحاصل الضرب

حساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير

لحساب قيمة كثيرة الحدود عند قيمة معينة للمتغير

نعوض المتغير في كثيرة الحدود بهذه القيمة

مثال: أوجد قيم كثيرات الحدود التالية عند قيم المتغير المعطاة

عندما إكس= ٣

عندما إكس= سالب ٢

عندما إكس= الجذر التربيعي لـ ٢

الحل

يتم حساب هذه القيمة بالتعويض بالقيم المعطاة كالتالي1,2,3

قسمة كثيرات الحدود (القسمة المطولة)

قسمة كثيرة حدود على كثيرة حدود تشبه عملية القسمة المستعملة في تقسيم الأعداد الصحيحة

تحليل كثيرات الحدود

عملية كتابة كثيرة حدود على شكل حاصل ضرب كثيرات حدود من درجة أقل تسمى تحليلاً وعملية التحليل تساعدنا في اختصار العبارات الكسرية وفي حل المعادلات١

تحليل كثيرات الحدود ٢

كثيرات حدود ذات المعاملات الصحيحة:

١- طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م).

٢- طريقة تحليل كثيرة الحدود.

٣- طريقة تحليل فرق مربعين.

- طريقة المعامل المشترك الأكبر (أ.ع.م): في هذه الطريقة نحاول إيجاد أكبر عامل مشترك بين الحدود إذا كان هذا ممكنا. كما هو موضح فى الأمثلة التالية:

مثال ١: نلاحظ هنا أن (أ.ع.م) بين ١٠إكس تكعيب و ٦ إكس هو x٢؛ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

شاهد الفيديو https://youtu.be/okSfmmKcEOs

مثال ٢: في هذا المثال، نلاحظ أن (أ.ع.م) بين الحدود الثلاثة هو xy٦؛ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

شاهد الفيديو https://youtu.be/okSfmmKcEOs

مثال ٣: هنا نلاحظ أن (أ.ع.م) هو كثير الحدود a-b٢ فبالتالي يكون التحليل كما يلي:

شاهد الفيديو https://youtu.be/okSfmmKcEOs

هناك حالات يتم فيها التحليل بتجميع حدود معينة كما هو موضح في المثال التالي: مثال ٤: حل كثيرة الحدود التالية:

الحل: نقوم أولاً بتجميع الحدين الأولين وتجميع الحدين الأخيرين كالتالي: ثم نأخذ (أ.ع.م) لكل من المجموعتين كالتالي: وفي الأخير نلاحظ أن المعادلة أصبحت عاملاً مشتركًا بين المجموعتين، فإذن يصبح التحليل كما يلي:

. طريقة تحليل كثيرة الحدود: الحالة الأولى:

a=1 في هذه الحالة نبحث عن عددين صحيحين يحققان الشرطين التاليين: mn=c

m+n=b مع الملاحظة أن إشارة m و n تكون نفس إشارة b إذا كان c>0 ومختلفتين إذا كان c < 0

مثال ١: حل كثيرة الحدود التالية: في هذه الحالة b=7 و c=-18 إذن يجب البحث عن عددين حاصل ضربهما يساوي -١٨ وجمعهما الجبري يساوي ٧؛ فالعددان حسب الشرطين المذكورين هما -٢ و ٩ لأن: -٢+٩=٧ و -٢*٩=-١٨ وهكذا يصبح التحليل كما يلي: شاهد الفيديو https://youtu.be/okSfmmKcEOs

الحالة الثانية: a لا تساوي ١. في هذه الحالة نبحث عن أربعة أعداد صحيحة m,n,p,qتحقق الشروط الثلاثة التالية: mn=a pq=c mq+np=b يتم اختيار m و n على أساس الشرط ١، ويتم اختيار p و q على أساس الشرط ٢، ثم نستخدم الشرط ٣؛ للتأكد من صحة الأعداد m,n,p,q وعند إيجاد هذه الأعداد يكون التحليل

مثال ٢: حل كثيرة الحدود التالية: الحل: يجب إيجاد الأعداد الصحيحة m,n,p,q حيث: ,Mn=a=6, pq=c=3 mq+np=b=11 بطريقة التجربة والخطأ، نجد في الأخير أن: m=2, n=3, p=3, q=1 إذن يكون التحليل كما يلي:

لاحظ ما يلي: ١- حتى يكون قابلاً للتحليل بمعاملات صحيحة، يجب أن تكون القيمة مربعًا كاملاً. فمثلاً هذه المعادلة قابلة للتحليل بمعاملات صحيحة نظرًا للتالي: ٢- إذا كان p=q و m=nفنقول: إن المعادلة مربع كامل، وتحليله يكون كما يلي: فمثلاً: هو مربع كامل .

طريقة تحليل فرق مربعين: في هذه الطريقة نستخدم إحدى القوانين المشهورة التي ذكرناها في بداية هذه الوحدة وهي كالتالي: شاهد الفيديو https://youtu.be/okSfmmKcEOs

الوحدة الرابعة

تعريف الكسور الجبرية

كما أن الأعداد النسبية هي عبارة عن قسمة عددين صحيحين فالكسور الجبرية تعتبر قسمة كثيرتي حدود كما هو موضح في الأمثلة التالية: شاهد الفيديو

تعريف مجال الكسور الجبرية

تعريف مجال الكسر الجبري: هو كل الأعداد الحقيقية باستثناء الأعداد التي تجعل المقام يساوي الصفر؛ لأنّ القسمة في هذه الحالة تكون غير معرَّفة. كما هو موضح في المثال التالي: مجال التعريف هنا هو كل الأعداد الحقيقية دون $x=3$ و $x=0$؛ لأن قيمة المقام عند هذه النقاط تساوي الصفر.

خصائص الكسور الجبرية

خصائص الكسور الجبرية: خصائص الكسور الجبرية هي كالتالي:شاهد الفيديو

اختصار الكسور الجبرية

عملية اختصار الكسر الجبري هي حذف المعاملات المشتركة في البسط والمقام
لنتعرف على كيفية الحل كما في المثال: شاهد الفيديو

الوحدة الخامسة

تعريف المصفوفات:

هي ترتيب أو قائمة لأعداد حقيقية محصورة بين قوسين، ومرتبة على شكل صفوف وأعمدة؛ بحيث إن عدد الصفوف يساوي**m** ، وعدد الأعمدة يساوي**n** ، وتسمى كل قيمة في المصفوفة عنصرًا، ويرمز إلى المصفوفة عادة باستعمال الحروف الكبيرة. كما هو موضح بالمثال الذي أمامك في الفيديو.

https://youtu.be/UFHzUYGU3Yw

تساوي مصفوفتين

كون المصفوفتان متساويتين إذا كانت لهما نفس الرتبة وتساوت عناصرهما (الموافقة) على الترتيب.

فمثلا نعتبر المصفوفتين التاليتين متساويتين؛ لأن لهما نفس الرتبة وتساوت عناصرهما.

لكن المصفوفتين التاليتين غير متساويتين؛ لأنهما من رتبتين مختلفتين.

وكذلك المصفوفتان التاليتان غير متساويتين؛

لأنّه يوجد عنصران غير متساويين (الصف الثاني والعمود الثاني).

جمع وطرح المصفوفات

الجمع والطرح:

حاصل جمع أو طرح مصفوفتين لهما نفس الرتبة هو مصفوفة من الرتبة نفسها،

وكل عنصر من عناصرها هو مجموع أو طرح العنصرين الموافقين له من المصفوفتين.مقلوب المصفوفة:

مقلوب مصفوفة مربعة A هو المصفوفة المربعة A-1 «إن وجدت»، بحيث إن حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة، أي أن: AA-1 = A-1A = **I**

ضرب مصفوفتين

حاصل ضرب مصفوفة من الرتبة **mxk** في مصفوفة من الرتبة**kxn**

(أي أنّ عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية) هو مصفوفة من الرتبة **mxn** ،

وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب الصف الموافق له من المصفوفة.

ضرب صف في عمود

ضرب صف في عمود: حاصل ضرب صف في عمود له عدد العناصر نفسه هو مجموع حواصل ضرب كل عنصر من الصف في العنصر الموافق له من العمود، وهذا الضرب ليس تبديليًّا.

ضرب مصفوفة في عدد حقيقي والقسمة عليه

ضرب أو قسمة مصفوفة في أو على عدد حقيقي هو مصفوفة من الرتبة نفسها، وكل عنصر من عناصرها هو حاصل ضرب أو قسمة العنصر الموافق له من المصفوفة الأصلية في أو على العدد الحقيقي.

مقلوب المصفوفات

مقلوب المصفوفة:

مقلوب مصفوفة مربعة **A** هو المصفوفة المربعة **A-1** «إن وجدت»، بحيث إن حاصل ضربهما هو مصفوفة الوحدة، أي أن: **AA-1 = A-1A = I**

ملحوظة: سنتطرق في هذا المستوى إلى مقلوب مصفوفة فقط.

نظرية: إذا كان محدد مصفوفة مربعة **A** لا يساوي صفرًا، فإنها تقبل مقلوبًا وحيدًا. مقلوب مصفوفة من الرتبة ٢ **x 2**:

نظرية : لتكن تلك المصفوفة المربعة؛ بحيث **a**و **b** و **c** و **d** أربعة أعداد حقيقية، و **det A** لا يساوي الصفر، فإن للمصفوفة **A** مقلوبًا وحيدًا يعطى بالقانون التالي: أي أنّ هذا القانون يسمح لنا بحساب مقلوب مصفوفة عندما يكون محددها لا يساوي الصفر.

منقول المصفوفة:

منقول مصفوفة A من الرتبة mxn هو المصفوفة Aأس t من الرتبة nxm؛

بحيث إنّ صفوف الثانية هي أعمدة الأولى، وأعمدة الثانية هي صفوف الأولى.

كما هو موضح في المثال: شاهد الفيديو https://youtu.be/lXl7tUcxbkA

مصفوفات خاصة

بعض المصفوفات الخاصة:

١- المصفوفة المربعة.

٢- مصفوفة الوحدة.

٣- المصفوفة الصفرية.

١- المصفوفة المربعة:

تكون المصفوفة مربعة إذا كان عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها.

فالمصفوفات B و A مصفوفات مربعة والمصفوفات D و C مصفوفات مربعة

لأن عدد الأعمدة يساوى عدد الصفوف بينما المصفوفة Eليست مصفوفة مربعة.

٢- مصفوفة الوحدة:

مصفوفة الوحدة هي مصفوفة مربعة؛ بحيث إن كل العناصر قطرها الرئيسي تساوي ١ ،

وكل العناصر الأخرى تساوي الصفر،

ويرمز لها بالرمز In إذا كانت من الرتبة n x n، أو بالرمز I إذا لم يكن هناك التباس في رتبتها.

نظرية :

مصفوفة الوحدة عنصر حيادي في ضرب المصفوفات.

مثال: إذا كان لدينا المصفوفة التالية:

٣- المصفوفة الصفرية:

المصفوفة الصفرية هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفارًا، ونرمز لها بالرمز ٠.

فمثلاً: المصفوفات التالية هي مصفوفات صفرية: شاهد الفيديو https://youtu.be/ZThCuwlAvd0

نظرية :

المصفوفة الصفرية عنصر حيادي في جمع المصفوفات.

نستنتج أنّ: A + 0 = 0 + A = A أي أنّ المصفوفة الصفرية عنصر حيادي في جمع المصفوفات.

نظريات في المصفوفات

نظرية :

إذا كانت a,b,c ثلاث مصفوفات من الرتب المواتية للقيام بالعمليات التالية فسيكون لدينا: - جمع المصفوفات تبديلي. - جمع المصفوفات تجميعي. - ضرب المصفوفات تجميعي. - ضرب المصفوفات توزيعي بالنسبة للجمع.

الوحدة السادسة

تعريف المحددات:

المحدد من الرتبة n x n هو عدد حقيقي نتحصل عليه من المصفوفة المربعة، وذلك باستخدام قواعد حسابية معينة، ونرمز له بالرمز det (A).

ملحوظة: يمكن الإشارة إلى أنّ قيمة المحددات تساوي عنصرها

حساب المحددات ٢×٢

المحدد ٢x2 للمصفوفة Aهو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيس (النازل) ناقص حاصل ضرب عناصر القطر غير الرئيس (الصاعد) : شاهد الفيديو https://youtu.be/sjYW3KjeM34

حساب المحددات ٣×٣

المحدد ٣*٣ للمصفوفة المربعة A هو مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة (النازلة)

ناقص مجموع حواصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسية الثلاثة (الصاعدة)،

ونتحصل على هذه الأقطار بإضافة عمودين مماثلين للعمودين الأول والثاني على الترتيب.

نظرية : محدد حاصل ضرب مصفوفتين مربعتين هو حاصل ضرب محدديهما.

الوحدة السابعة

تعريف المعادلات

المعادلة: هي التساوي بين عبارتين (ككثيرتي حدود)، وتكون هذه المعادلة صحيحة لقيم معينة للمجهول، وخاطئة لقيم أخرى.

تاريخ المعادلات

درس المصريون والبابليون المعادلات منذ الألفية الثانية قبل بداية التاريخ الميلادي، ولكن الذي أسس لهذا الفن هو محمّد الخوارزمي في كتابه "الجبر والمقابلة" في نهاية القرن الثاني وبداية القرن الثالث الهجري (حوالي سنة ٨٢٥م)، وهو المؤسس لأحد فروع الرياضيات المسمى بالجبر، وكان الحافز لكتابة هذا الكتاب هو حل مسائل الفرائض أو المواريث بطريقة رياضية. وتكمن أهمية المعادلات في إمكانية صياغة كثير من المسائل التطبيقية على شكل معادلات.

تعريف المعادلات الخطية

تعريف المعادلات الخطية: يوجد عدة تعريفات.

تعريف ١: تعبير خطي لمتغيرات ما، هو مجموع حواصل ضرب هذه المتغيرات في أعداد حقيقية.

تعريف ٢: معادلة خطية لمجاهيل معينة،هي معادلة تحتوي علىتعبيراتخطية لهذه المجاهيل وثوابت فقط.

تعريف ٣: جملة معادلات خطية (أو نظام خطي) هو مجموعة من المعادلات الخطية مأخوذة في نفس الوقت.

ملحوظة: لا يحتاج إلى استخدام كلمة جملة عندما تكون لدينا معادلة واحدة فقط.

تعريف ٤: حل جملة معادلات خطية هو إيجاد كل القيم الممكنة للمجاهيل؛

بحيث تتحقق كل المعادلات المعتبرة.

وهذا الحل له ثلاث حالات فقط:

الحالة الأولى: جملة المعادلات الخطية تقبل حلاً وحيدًا،

وذلك عندما يكون لكل مجهول قيمة واحدة فقط تحقق في مجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثانية: جملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل،

وذلك عندما لا توجد قيمة لكل مجهول تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة.

الحالة الثالثة: جملة المعادلات الخطية لها عدد لا نهائي من الحلول،

وذلك عندما يوجد عدد لا نهائي من القيم لمجهول واحد على الأقل

وقيم للمجاهيل الأخرى تحقق بمجملها كل المعادلات المعتبرة؛

(أي عندما لا تكون الحالتين الأوليين).

المعادلات المتكافئة

المعادلات المتكافئة هي المعادلات التي تكون لها نفس الحلول، وتتم عملية حل معادلة في متغير بإيجاد سلسلة من المعادلات المتكافئة للمعادلة الأصلية؛ حتى نصل إلى معادلة من الشكل: إكس تساوي ثابت.

طرق إيجاد المعادلات المتكافئة

لإيجاد المعادلات المتكافئة عادة ما نتبع الطرق التالية: اختصار العبارات في طرفي المعادلة، إما بجمع الحدود المتشابهة، أو بخصائص أخرى، مثل: التبديلية، التجميعية، والتوزيعية .

المعادلات الخطية ذات المجهول الواحد

قد مرت علينا هذه المعادلات في الفصل الأول، ولكن في حالة خاصة، وسندرس هنا حالتها العامة.

جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين - الحل بطريقة التعويض

أولا: الحل بطريقة التعويض ويتم باتباع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: نوجد عبارة أحد المجهولين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين.

الخطوة الثانية: نعوض عن هذا المجهول في المعادلة الأخرى، فنحصل على معادلة خطية ذات مجهول واحد.

الخطوة الثالثة: نحل المعادلة المتحصل عليها منفردة.

الخطوة الرابعة: ثلاث حالات:

الحالة الأولى: إذا كان لهذه المعادلة حل وحيد فإن للجملة حلاً وحيداً

نحصل عليه بالتعويض عن المجهول الثاني في عبارة المجهول الأول.

الحالة الثانية: إذا كانت هذه المعادلة مستحيلة الحل فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان لهذه المعادلة عدد لا نهائي من الحلول فإن للجملة عدد لا نهائي من الحلول.

جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين - الحل بطريقة كرامير

الحل بطريقة كرامير:

لدينا جملة معادلتين خطيتين ذات مجهولين، وعلى الشكل التالي:

بحيث إن المعاملات a1 و a2 و b1 و b2، والثوابت c1 و c2 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد (٢ في ٢)؛ بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد،

وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة.

محدد مجهول: ما هو إلا المحدد (٢ في ٢)؛

بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة.

نظرية:

حل جملة المعادلتين الخطيتين ذات المجهولين للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط، هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر،

فإن للجملة حلا وحيدًا، هو:

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر،

وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر، فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر،

وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر،

فإن للجملة عددًا لا نهائي من الحلول.

جملة المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل

الحل بطريقة كرامير:

رغم أنه يمكن تعميم طريقة التعويض إلى هذه الحالة،

إلا أننا سنكتفي بطريقة كرامير؛ وذلك لسهولتها.

ليكن لدينا جملة ثلاث معادلات خطية ذات ثلاثة مجاهيل

x و y و z على الشكل التالي:

بحيث إن المعاملات a1 و a2 و a3و b1 و b2 و b3 و c1 و c2 و c3 والثوابت d1 و d2 و d3 هي أعداد حقيقية.

محدد الجملة D هو المحدد ٣ في ٣؛ بحيث كل عمود فيه متكون من معاملات مجهول واحد،

وكل صف متكون من معاملات المجاهيل في معادلة واحدة، أي أن:

محدد مجهول ما هو إلا المحدد ٣ في ٣ بحيث نستبدل عمود معاملات المجهول بعمود الثوابت في محدد الجملة، أي أن:

نظرية

حل جملة المعادلات الخطية ذات ثلاثة مجاهيل للتعريف السابق له ثلاث حالات فقط، هي:

الحالة الأولى: إذا كان محدد الجملة لا يساوي الصفر، فإن للجملة حلا وحيدًا، هو:

الحالة الثانية: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر،

وكان واحد (على الأقل) من محددات المجاهيل لا يساوي الصفر،

فإن الجملة مستحيلة الحل.

الحالة الثالثة: إذا كان محدد الجملة يساوي الصفر،

وكان كل محدد من محددات المجاهيل يساوي الصفر،

فإن للجملة عددًا لا نهائي من الحلول.

تعريف المعادلة من الدرجة الأولى

المعادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد هي معادلة خطية ذات مجهول واحد - وهي معادلة يمكن كتابتها على الشكل:

شاهد الفيديو

ملحوظة: يمكن التأكد من الحل بتعويضه في المعادلة الأصلية.

في حالة وجود متغير في المقام يجب أن نستثني في البداية القيم التي تجعل المقام يساوي الصفر قبل أن نتخلص من المقام،

وإذا كانت قيمة الحل في الأخير تساوي إحدى القيم التي استثنيناها في بداية الحل فنرفضها كحل للمعادلة،

وإذا كانت هي الحل الوحيد، فنستنتج أنّ المعادلة ليس لها حل.

تعريف المعادلة من الدرجة الثانية

المعادلة من الدرجة الثانية هي: معادلة يمكن كتابتها على الشكل القياسي التالي: شاهد الفيديو

طرق حل المعادلة من الدرجة الثانية - طريقة القانون العام

طريقة القانون العام طريقة المميز:

تتلخص طريقة القانون العام في حساب (دِلتا)، ونسمي هذه القيمة بالمميز، وتكون حلول المعادلة هي: حيث: a لا تساوي الصفر.

ولأن قيمة المميز موجودة تحت الجذر، فهناك ثلاث حالات لحل المعادلة.

١- إذا كانت القيمة موجبة، فهناك حلان حقيقيان مختلفان.

٢- إذا كانت القيمة تساوي الصفر، فهناك حلان حقيقيان متشابهان.

٣- إذا كانت القيمة سالبة، فليست هناك حلول حقيقية.

طرق حل المعادلة من الدرجة الثانية - طريقة الجذر التربيعي

طريقة الجذر التربيعي:

إذا كانت A و B عبارتين جبريتين؛ حيث A :تربيع تساويB ،

و Bأكبر من الصفر؛ إذن A :تساوي موجب أو سالب الجذر التربيعي لـB

طريقة التحليل:

إذا كان من الممكن تحليل كثيرة الحدود باستخدام أعداد صحيحة: فيمكن حينئذ تطبيق خاصية صفر حاصل الضرب كالتالي: شاهد الفيديو

الوحدة الثامنة

تعريف الدالة

تعريف الدالة: تكون علاقة f من مجموعة X إلى مجموعة Y دالة إذا كان كل عنصر من X في علاقة مع عنصر واحد على الأكثر من Y؛ أي أنه من أجل أي عنصرين x1 و x2 من X هما في علاقة مع عنصرين من Y يكون كالتالي:

حيث إنّ f(x)يمثل العنصر الذي هو في علاقة مع x.

نسمي المجموعة X مجموعة المنطلق، والمجموعة Y مجموعة الوصول، والعنصر y = f(x) صورة X بواسطة الدالة f، والعنصر x أصل y = f(x) بواسطة الدالة f، ونقول: إن f(x) غير معرفة في y إذا كان x ليس في علاقة مع أي عنصر من y؛ أي أن f(x)غير موجود في y. نرمز لهذه الدالة بالرمز التالي: شاهد الفيديو https://youtu.be/dE2upbQADH4

أنواع الدوال

أنواع الدوال:

- الدالة الشاملة.

- الدالة المتباينة.

- الدالة المتقابلة.

الدالة الشاملة:

الدالة f تسمى دالة شاملة (غامرة)، وهي الدالة التي يرتبط كل عنصر من مجالها المقابل بعنصر واحد على الأقل من المجال؛

أي أنّ: Rf = Y؛ أي أنّ المدى المصاحب للدالة يساوي المدى للدالة.

الدالة الممثلة بالمخطط السهمي التالي دالة شاملة (تغامر). شاهد الفيديو https://youtu.be/7YcgyiHLLyw

الدوال الجبرية

الدوال الجبرية:

هي الدوال التي يمكن تعريفها باستخدام كثيرات الحدود وعمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة (المطولة).

وهي نوعان:

كثيرات الحدود وهي التي نستخدم فيها الجمع والطرح والضرب فقط،

والدوال الكسرية وهي التي نستخدم فيها العمليات السابقة والقسمة أيضًا.

الدوال الفردية والدوال الزوجية

الدالة الفردية:

المتغيران x و x- لهما صورتان متقابلتان بالدالة f؛ حيث مهما يتغير x في مجموعة تعريف هذه الدوال، فإن x- يتغير أيضًا في نفس المجموعة. ونقول عنها: إنها دالة فردية: إذا كان: f(-x)=-f(x) أو f(-x)+f(x)=٠؛ حيث إن x تنتمي إلى Df، وسالب x تنتمي إلى Df.

أما الدالة الزوجية:

المتغيران x و x- معًا لهما نفس الصورة بالدالة f مهما يتغير x في مجموعة تعريف هذه الدوال، فإن x- يتغير أيضًا في نفس المجموعة. ونقول عنها: إنها دالة زوجية: إذا كان: f(-x)=f(x) أو f(-x)-f(x)=٠؛ حيث إن x تنتمي إلى Df وسالب x تنتمي إلى Df.

الدوال العددية

الدوال العددية : هي الدوال التي تكون مجموعة وصولها مجموعة عددية. كل الدوال التالية هي أمثلة لدوال عددية. المتغيران الحقيقيان x و x- معا لهما صورتان متقابلتان بالدالة f. شاهد الفيديو https://youtu.be/TqvxsVEqmu0

منحنى الدالة

يمكن تمثيل الدوال العددية التي يكون مجالها مجموعة عددية فيما يُسمى بالمستوى الديكارتي؛ وذلك باتباع الخطوات التالية:

إنشاء جدول لقيم x (المعرفة) مرتبة من أصغرها إلى أكبرها، وقيم y=f(x) الموافقة لها.

رسم النقاط (x,y) الناتجة في المستوى الديكارتي.

وصل النقاط بعضها ببعض حسب ترتيبها بقطع مستقيمة إذا كانت القيم الموافقة للعنصر x لها صورة، شاهد الفيديو https://youtu.be/8qoOAgG3xR4

الوحدة التاسعة

تعريف الأس١

تعريف (١):إذا كان لدينا عدد حقيقي x، وعدد طبيعي n.

فسيكون x أس n، هو: ضرب x بعدد مرات n.

يسمى هذا الرمز بالقوة n للعدد x ، ويقرأ x أس n أو x مرفوع للقوة n.

ويسمى x بالأساس، والعدد n يسمى الأس.

تعريف الأس ٢

تعريف (٢) إذا كان لدينا عدد حقيقي X ولا يساوي الصفر وعدد طبيعي N فان النتيجه هي : شاهد الفيديو

قو انين الأس

للأسس عدة قوانين شاهد الفيديو لمعرفتها .

الوحدة العاشرة

نظرية فيثاغورس

تنص النظرية على أن مجموع مربعي طولي ضلعي القائمة، وهما الضلعين الأقصر في المثلث قائم الزاوية وذلك مساوٍ لمربع طول الوتر الذي هو الضلع الأطول في المثلث

تعريف وفروع حساب المثلثات

تعريف وفروع حساب المثلثات

هو فرع من فروع الرياضيات يعالج العلاقات بين أضلاع وزوايا المثلثات والخصائص ، والتطبيقات العملية للدوال المثلثية

وينقسم حساب المثلثات إلى فرعين:

١- حساب المثلثات المستوية

ويتعامل مع أشكال تقع بأكملها في مستوى واحد

٢-حساب المثلثات الكروية

ويتعامل مع المثلثات التي تعتبر جزءا أو مقطعا من سطح كرة

العلاقة بين الدوال المثلثية والمثلث قائم الزاوية

إذا كانت θ تمثل قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية، فإن الدوال المثلثية الست تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل والضلع المجاور

الدوال المثلثية الأساسية

شاهد المثال في الفيديو

العلاقة بين الدوال المثلثية والمثلث قائم الزاوية٢

لقد وفرت الحاسبات الصغيرة الحصول على قيم الدوال المثلثية ، تابع الفيديو لمعرفة الطريقة

https://youtu.be/CZWltcrBBXk